23) ~~...~~ Los subespacios fundamentales son:

$Col(A)$, $Fil(A)$, $Nul(A)$, $Nul(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Empiezo por $Col(A)$:

$Col(A)$ es el subespacio generado por las columnas de la matriz, por lo tanto:

$$Col(A) = gen\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_4}, \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}}_{v_5} \right\}$$

Pongo cada vector como fila y triangulo para ver si se anula alguno o se ve más claro si alguno es LD.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ F2 \to 2F1-F2 \\ F3 \to F1-F3 \\ F4 \to F1-F4 \\ F5 \to 5F1-F5 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$[2 \; -4 \; 2]^T$ es LD

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F3 \to 3F2 - F3 \\ F4 \to 4F2 - F4 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ [1 \ \ 4 \ \ 4]^T \text{ es LD} \\ [5 \ \ -2 \ \ 9]^T \text{ es LD} \end{array}$$

→ Una base de ColA será la formada por $\{v_1, v_3\}$, es decir:

$$\boxed{B_{ColA} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}$$ de dim = 2

Veo el caso de Fil(A)

Fil(A) es el subesp. generado por las filas ~~col~~ traspuestas de la matriz, por lo tanto:

$$Fil(A) = gen\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$$

Pongo c/vector como fila y triangulo para ver si se anula alguno o ~~[illegible]~~ se ve más claro si hay alguno LD.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \to F2 \to 2F1 + F2 \\ F3 \to F1 - F3 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

claramente la tercer fila es múltiplo de la segunda, por lo tanto voy a anular la tercera y queda que una base de FilA será la formada por $\{v_1, v_2\}$, es decir:

$$B_{FilA} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$ Lo cual verifica dim(FilA) = dim(ColA) = rangoA = 2

Veo el caso de Nul(A)

Nul(A) es el conj. de soluciones del sist. homogéneo asociado a la matriz, es decir las soluciones de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Armo la matriz asociada ~~ampliada~~ y triangulo p/encontrar más fácil las soluciones.

*Como ya lo hice p/el espacio Fil(A), escribo solo las ecuaciones finales igualadas a 0.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 & \text{I} \\ 2x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

de II $\rightarrow$ $x_3 = -3x_4 - 4x_5$

en I $\rightarrow$ $x_1 + 2x_2 - 3x_4 - 4x_5 + x_4 + 5x_5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ $x_1 = -2x_2 + 2x_4 - x_5$

Por lo tanto los $\bar{X}$ que cumplan son de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_2 + 2x_4 - x_5, x_2, -3x_4 - 4x_5, x_4, x_5) \rightarrow$$

$$\rightarrow = x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0, 0) + x_4 \cdot (2, 0, -3, 1, 0) + x_5 \cdot (-1, 0, -4, 0, 1)$$

Por lo tanto $\text{Nul}(A) = \text{gen}\underbrace{\{(-2,1,0,0,0), (2,0,-3,1,0), (-1,0,-4,0,1)\}}_{B}$

~~Además~~ Por teorema de la dimensión:

$\underbrace{\text{rango}\, A}_{\dim(\text{Col}\, A) = 2} + \dim(\text{Nul}(A)) = \underbrace{\text{no. columnas}}_{5} \rightarrow$

$\rightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 3 \rightarrow$ B es LI y es base de Nul(A)

Veo el caso de $Nul(A^T)$

$Nul(A^T)$ es el conj. de soluciones del sist. homogéneo asociado a la matriz transpuesta, es decir de:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Armo la matriz asociada y triangulo p/encontrar más fácil las soluciones.

Como ya trabajé con esa matriz para el espacio $Col(A)$, escribo solo las ecuac. finales igualadas a 0.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_2 = 0 \rightarrow \underline{x_1 = 4x_2} \\ -2x_2 - x_3 = 0 \rightarrow \underline{x_3 = -2x_2} \end{cases}$$

Por lo tanto los $\bar{X}$ que cumplan son de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3) = (4x_2, \cancel{\ }x_2, -2x_2) = x_2 . (4, 1, -2)$$

Por lo tanto $Nul(A^T) = gen\underbrace{\{(4,1,-2)\}}_{B}$

Por Teorema de la dimensión:

$$\underbrace{\text{rango } A^T}_{2} + \dim(Nul(A^T)) = \underbrace{\text{nro. columnas } (A^T)}_{3} \rightarrow$$

$\rightarrow \dim(Nul(A^T)) = 1 \rightarrow B$ es base de $Nul(A^T)$

Para la segunda parte del ejercicio

Sé, por teorema, que si $Nul(A) = \{0\}$ tiene a lo sumo $Ax=b$ una solución (o ninguna), como en este caso $Nul A \neq \{0\}$, $Ax=b$ tiene infinitas soluciones.

Busco esas soluciones:

$$Ax=b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Armo la matriz asociada ampliada y triangulo para encontrar más fácil las soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2 \rightarrow 2F1+F2 \\ F3 \rightarrow F1-F3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Veo que la fila 3 es múltiplo de la 2, entonces la descarto y las ec. quedan:

$$\begin{cases} x1+2x2+x3+x4+5x5 = 1 \rightarrow x1+2x2+2-3x4-4x5+x4+5x5=1 \rightarrow \text{I} \\ 2x3+6x4+8x5 = 4 \rightarrow \underline{x3 = 2-3x4-4x5} \end{cases}$$

$$\text{I} \rightarrow \underline{x1 = -1-2x2+2x4-x5}$$

Por lo tanto un $\bar{X}$ que cumpla sería de la forma:

$$(x1,x2,x3,x4,x5) = (-1-2x2+2x4-x5,\ x2,\ 2-3x4-4x5,\ x4,\ x5) \rightarrow$$

$$\rightarrow = \underbrace{x2.(-2,1,0,0,0) + x4.(2,0,-3,1,0) + x5.(-1,0,-4,0,1) + (-1,0,2,0,0)}_{\text{SOLUCIONES INFINITAS}}$$

SOLUCIONES
INFINITAS.